le cnam
Alsace 2014 – 2015

RCP104
Optimisation en Informatique

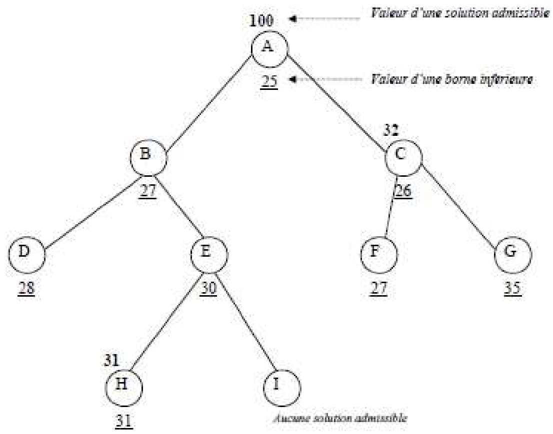
TD 2 : Simplexe et PLNE

Dr. Nazih OUWAYED
nazih.ouwayed@gmail.com
http://nouwayed.yolasite.com

Exercice 1

le cnam Alsace

Soit un problème de **minimisation pour lequel on a commencé l'arborescence de recherche** d'une solution optimale suivante, où les sommets sont arbitrairement notés A, B, …, I :



Exercice 1

le cnam
Alsace

1) Quelle est la valeur de la meilleure solution connue du problème, pour l'instant ?
2) Quelle est la valeur de la meilleure borne inférieure de la valeur optimale du problème, pour l'instant ?
3) Pour chacune des feuilles, indiquer si elle peut être élaguée et pourquoi ?

RAPPEL : Pour un problème de maximisation,
val. d'une solution admissible ≤ **val. optimale en entier** ≤ val. optimale en continu

RAPPEL : Pour un problème de minimisation,
val. optimale en continu ≤ **val. optimale en entier** ≤ val. d'une solution admissible

Exercice 1 - Solution

le cnam
Alsace

1) Quelle est la valeur de la meilleure solution connue du problème, pour l'instant ?
   31
2) Quelle est la valeur de la meilleure borne inférieure de la valeur optimale du problème, pour l'instant ?
   27

3) Pour chacune des feuilles, dire si elle peut être élaguée et pourquoi.
   D = 28 : Non élaguée car entre 31 et 27
   F = 27 : Non élaguée car elle peut donner des solutions admissibles
   G = 35 : élaguée car > solution optimale (31)
   H = 31 : élaguée car égale solution optimale
   I = Impossible : élaguée car pas de solution admissible

Exercice 2

le cnam Alsace

Résoudre le programme linéaire suivant par l'algorithme du simplexe ?

$$\begin{array}{lrcrl} \min & x_1 & + & 2x_2 & \\ \text{scq} & 4x_1 & + & 3x_2 & \geq 12 \\ & 6x_1 & + & x_2 & \geq 6 \\ & 2x_1 & + & 5x_2 & \geq 9 \\ & & & x_j & \geq 0 \quad \forall j = 1,2 \end{array}$$

Exercice 2 - Solution

le cnam Alsace

$(x_1, x_2)=(33/14, 6/7)$ de valeur $Z = 57/14$

Tableau #1

x1	x2	s1	s2	s3	-z	
4	3	-1	0	0	0	12
6	1	0	-1	0	0	6
2	5	0	0	-1	0	9
1	2	0	0	0	1	0

Tableau #2

x1	x2	s1	s2	s3	-z	
0	7/3	-1	2/3	0	0	8
1	1/6	0	-1/6	0	0	1
0	14/3	0	1/3	-1	0	7
0	11/6	0	1/6	0	1	-1

Tableau #3

x1	x2	s1	s2	s3	-z	
0	0	-1	1/2	1/2	0	9/2
1	0	0	-5/28	1/28	0	3/4
0	1	0	1/14	-3/14	0	3/2
0	0	0	1/28	11/28	1	-15/4

Exercice 2 - Solution

le cnam Alsace

$(x_1, x_2)=(33/14, 6/7)$ de valeur Z =57/14

Tableau #4

x1	x2	s1	s2	s3	-z	
0	0	-2	1	1	0	9
1	0	-5/14	0	3/14	0	33/14
0	1	1/7	0	-2/7	0	6/7
0	0	1/14	0	5/14	1	-57/14

Exercice 3

le cnam Alsace

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max & 2x_1 & + & 2x_2 & & & & & \\
\text{scq} & x_1 & - & x_2 & & & \leq & & 1 \\
- & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & - & 1 \\
 & & & & & x_j & \geq & & 0 \quad \forall j = 1, 2, 3
\end{array}$$

1) Ecrire le dual de ce programme linéaire ?

2) Rechercher une solution optimale de ce dual en utilisant l'algorithme du simplexe ?

Exercice 3 - Solution

le cnam
Alsace

1) Min w: $y_1 + y_2 + y_3$

scq

$y_1 - y_2 - y_3 \geq 2$

$-y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 2$

$y_2 - y_3 \geq 0$

2) $(y_1, y_2, y_3) = (6,4,0)$ de valeur $w = 10$

Exercice 4

le cnam
Alsace

Résoudre le Programme Linéaire en Nombres Entiers suivant par la :

$$\begin{cases} \max 4x_1 - x_2 \\ s.c. \\ \quad 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\ \quad x_2 \leq 3 \\ \quad 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \text{ et entiers} \end{cases}$$

1) Méthode graphique ?

2) Méthode Branch & Bound ?

Exercice 4 – Solution

le cnam
Alsace

1) Méthode graphique

Pour commencer, nous traçons les lignes des contraintes :

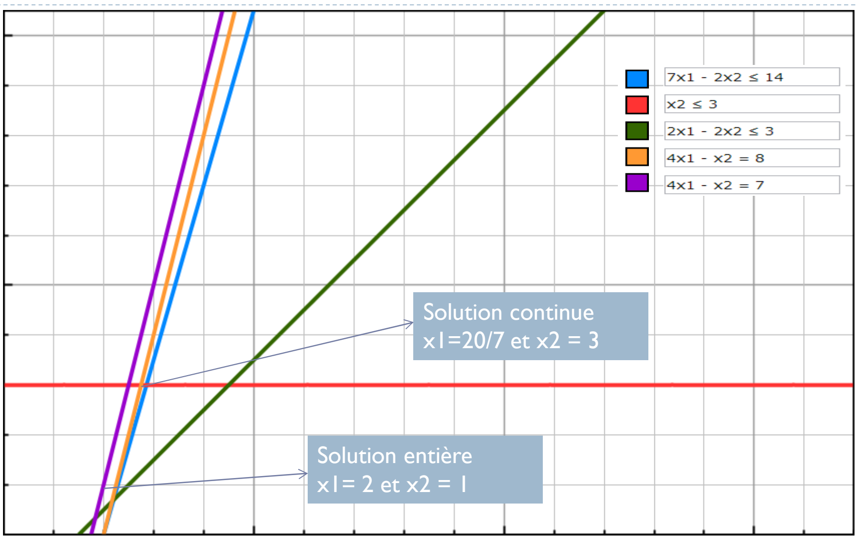
- $7x_1 - 2x_2 = 14$
- $x_2 = 3$
- $2x_1 - 2x_2 = 3$

Nous obtenons une solution continue qui a une valeur Z_{max}= 8,43 avec x1 = 20/7 et x2 = 3.

- Pour trouver une solution entière, nous traçons la ligne de l'objectif $4x_1 - x_2$ = partie entière inférieure de Z_{max}=8. On trouve qu'il n'existe aucune solution entière ayant cette valeur.
- Puis, on trace la ligne $4x_1 - x_2$ =8-1=7 ce qui donne une solution optimale entière qui a une valeur Z_{max}=7 avec x_1= 2 et x_2=1. Le graphique suivant montre le démarche cité ci-avant :

Exercice 4 – Solution

le cnam
Alsace



Exercice 4 – à Rendre

le cnam Alsace

Résoudre le Programme Linéaire en Nombres Entiers suivant par la :

$$\begin{cases} \max 4x_1 - x_2 \\ s.c. \\ \quad 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\ \quad x_2 \leq 3 \\ \quad 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \text{ et entiers} \end{cases}$$

- Méthode Branch & Bound ?

Pour la méthode du simplexe, utiliser cet outil en ligne :
http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html

Références

le cnam Alsace

- Cours Optimisation en Informatique – Sourour ELLOUMI et Eric Soutif
- Cours Modélisation - Luciano porretta